

BAB 8

Pemodelan Matematik

Apakah yang akan anda pelajari?

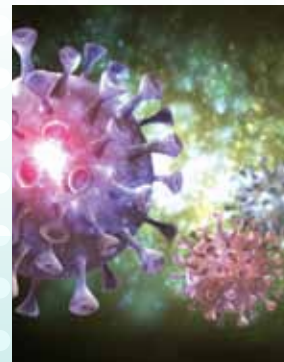
- Pemodelan Matematik

Maslahat Bab Ini

Pemodelan matematik diaplikasikan dalam pelbagai disiplin dalam dunia sebenar. Jurutera menggunakan pemodelan matematik untuk menganalisis laluan trafik di atas sebuah jambatan. Syarikat telekomunikasi menggunakan pemodelan matematik untuk menentukan harga mengecaj pengguna bagi sesuatu perkhidmatan panggilan. Ahli sains juga menggunakan pemodelan matematik dalam meramalkan trend pertumbuhan penduduk dan sebaran penyakit berjangkit untuk menjamin kesejahteraan manusia sejagat.

Tahukah Anda?

Pandemik Covid-19 telah melanda dunia pada tahun 2019. Sehubungan dengan itu, pihak kerajaan telah melaksanakan Perintah Kawalan Pergerakan (PKP) dalam usaha melandaikan lekuk epidemiologi kes kebolehhangkitan Covid-19 di dalam negara kita. Pemodelan matematik boleh digunakan untuk membuat ramalan epidemik.



Untuk maklumat lanjut:



bit.do/TahukahAndaBab8

GERBANG ISTILAH



eksponen
fungsi eksponen
kuadratik
linear
pemodelan matematik

exponent
exponential function
quadratic
linear
mathematical modeling



Pembinaan terowong SMART (*Stormwater Management and Road Tunnel*) bertujuan untuk mengalirkan air banjir ketika berlaku hujan lebat di Bandaraya Kuala Lumpur. Walau bagaimanapun, terowong itu juga mempunyai fungsi tambahan dalam mengurangkan kesesakan trafik. Reka bentuk unik dan cara operasi terowong yang inovatif ini telah memberikan cabaran kepada jurutera pada awal pembinaannya. Tahukah anda terowong SMART diklasifikasikan kepada empat mod operasi yang berlainan melalui pemodelan matematik?

8.1 Pemodelan Matematik

Apakah itu pemodelan matematik?

Dunia kita dipenuhi dengan pelbagai soalan penting yang tidak terjawab. Misalnya,

Standard Pembelajaran

Menerangkan pemodelan matematik.



Adakah kenaikan paras laut akan memberikan kesan kepada negeri-negeri pesisiran pantai di Malaysia?



Berapakah kos perbelanjaan untuk belajar di kolej atau di universiti dalam tempoh 10 tahun yang akan datang?



Adakah jumlah penduduk di Malaysia akan melebihi 40 juta orang?



Adakah ciri-ciri mangsa jenayah siber dapat dikenal pasti dengan mengkaji tabiat seseorang itu melayari Internet?

Jawapan kepada persoalan di atas sentiasa dikaji oleh penyelidik. Adakah jawapan kepada persoalan ini dapat dicari? Mungkin. Yang pasti ialah cubaan untuk mencari penyelesaian memerlukan penggunaan matematik, barangkali melalui penciptaan, aplikasi dan perincian **model matematik**.

Satu model matematik ialah suatu hubungan matematik yang menghuraikan situasi dunia sebenar. Misalnya, rumus $I = Prt$ menunjukkan suatu hubungan antara faedah mudah dengan prinsipal, kadar faedah dan masa.

Dalam bab ini, anda akan diperkenalkan proses membina model matematik, yang dikenali sebagai **pemodelan matematik**. Dalam pemodelan matematik, masalah dunia sebenar diterjemah sebagai masalah matematik. Kemudian anda akan menyelesaikan masalah matematik berkenaan dan mentafsirkan semula penyelesaiannya dalam konteks masalah dunia sebenar.

Model matematik ialah suatu perwakilan bagi satu sistem atau senario yang digunakan untuk memperoleh kefahaman secara kualitatif dan/atau kuantitatif bagi masalah dunia sebenar serta meramalkan perlakuan masa depan.



Perhatikan masalah di bawah.

1

Di bandar *A*, terdapat 40 000 orang penduduk. Diketahui 45% daripada penduduk di bandar itu mengamalkan tabiat mengitar semula botol minuman plastik terpakai. Jika setiap orang di bandar itu menggunakan 5 botol minuman plastik setiap minggu, berapa banyak botol minuman plastik yang dikitar semula setiap minggu di bandar tersebut?

Soalan seperti ini sering ditanya dalam buku Matematik untuk mengukuhkan konsep peratusan. Hal ini adalah satu contoh soalan dalam bentuk masalah. Masalah seperti ini memberi semua maklumat yang diperlukan dan kita hanya perlu melaksanakan perhitungan supaya satu jawapan yang betul diperoleh. Masalah seperti ini digunakan untuk membantu kita memahami konsep matematik tertentu dan mengukuhkan kemahiran matematik yang penting.

Mari kita lihat pula soalan seperti berikut.

2

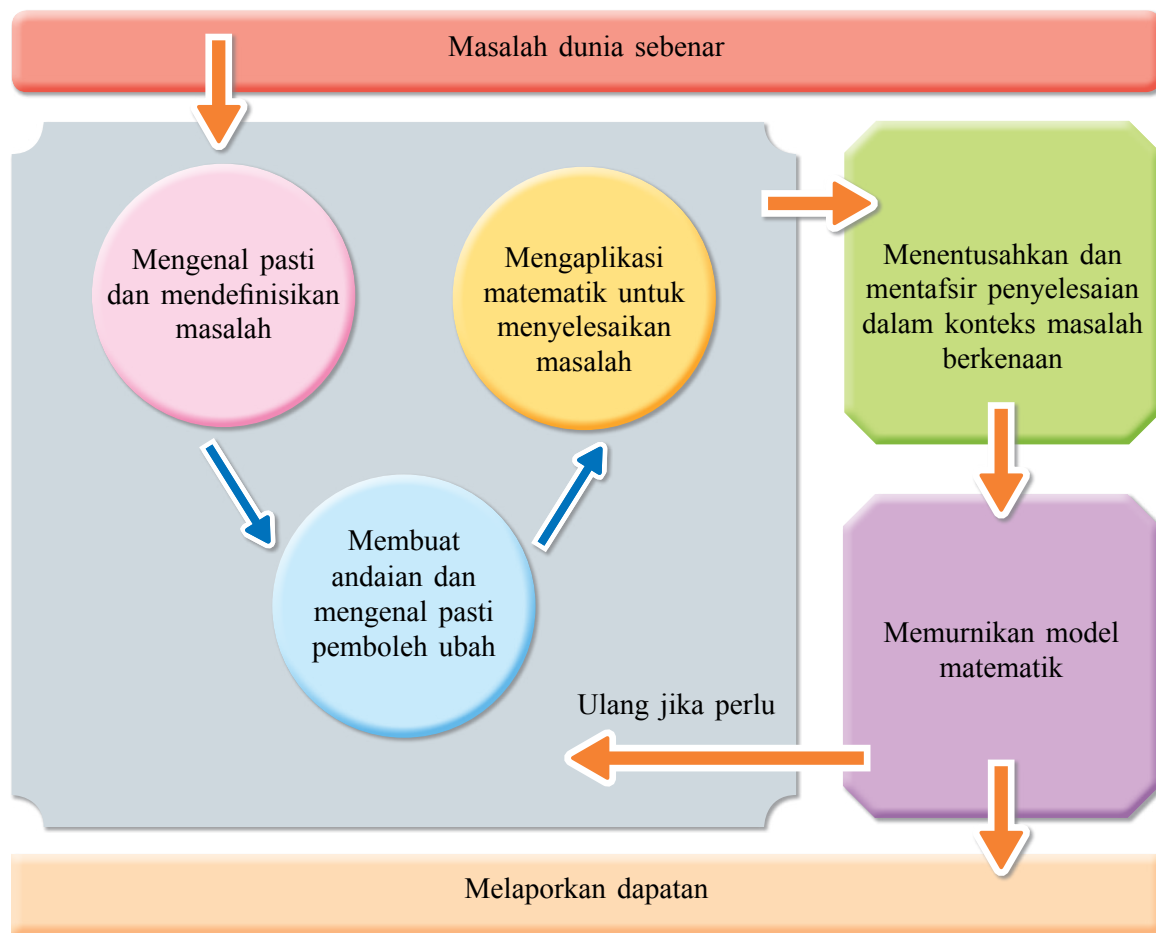
Berapa lamakah masa yang diperlukan untuk membersihkan tumpahan minyak di lautan?

Soalan kedua ini agak berbeza. Kita tidak mempunyai maklumat yang mencukupi untuk menjawab soalan ini. Soalan ini ialah soalan terbuka. Kita biasanya tidak mempunyai maklumat yang mencukupi apabila cuba menyelesaikan masalah dunia sebenar. Permasalahan dunia sebenar memerlukan kita menggunakan pengetahuan matematik dan kreativiti untuk menyelesaikannya. Dalam hal ini, pemodelan matematik adalah paling sesuai dalam menyelesaikan soalan terbuka seperti ini.

Terdapat beberapa komponen penting dalam pemodelan matematik:

- 1** Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah
- 2** Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah
- 3** Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah
- 4** Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan
- 5** Memurnikan model matematik
- 6** Melaporkan dapatan

Proses pemodelan boleh diringkaskan seperti dalam rajah di bawah.



Mari kita lihat satu contoh pemodelan matematik yang melibatkan semua komponen di atas.

Masalah Dunia Sebenar

Pasar raya yang terletak jauh dari rumah anda mungkin menjual sekampit beras 10 kg dengan harga yang lebih rendah daripada pasar raya yang berdekatan dengan rumah anda. Adakah berbaloi jika anda memandu ke pasar raya yang terletak lebih jauh dari rumah untuk membeli dua kampak beras 10 kg yang lebih murah?

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

- ❖ Harga sekampit beras 10 kg dan kos petrol.
- ❖ Tentukan kedudukan dua buah pasar raya yang jaraknya masing-masing dari rumah adalah berbeza.
- ❖ Cari maklumat yang berkaitan dari Internet, misalnya harga sekampit beras 10 kg di dua buah pasar raya berkenaan, jarak setiap pasar raya dari rumah, harga petrol semasa, kadar penggunaan petrol kereta dan sebagainya.

Membuat andaian

- Rumah, pasar raya A, pasar raya B berada pada satu garis lurus
- Memandu kereta semasa ke pasar raya
- Membeli bilangan kampil dan cap beras yang sama di pasar raya A dan pasar raya B



TiP Bestari

Andaian yang dilakukan biasanya dimulakan dengan pemboleh ubah paling mudah. Setelah masalah diselesaikan, andaian yang lebih rumit boleh dipertimbangkan.

Mengenal pasti pemboleh ubah

- Katakan
 - s , jarak di antara pasar raya A dengan pasar raya B
 - P_1 , harga sekampil beras 10 kg di pasar raya A
 - P_2 , harga sekampil beras 10 kg di pasar raya B
 - m , kadar penggunaan petrol kereta dalam km per liter
 - n , bilangan kampil beras 10 kg yang akan dibeli
 - H , harga petrol semasa dalam RM per liter
 - S , beza harga dalam RM yang dibayar bagi membeli beras 10 kg di pasar raya B berbanding dengan pasar raya A
 - T , beza kos petrol dalam RM yang dibayar bagi perjalanan ke pasar raya B berbanding dengan pasar raya A

KOTAK MEMORI

Pemboleh ubah merupakan kuantiti yang tidak diketahui nilainya.

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

Harga sekampil beras 10 kg

Pasar raya A: RM25.95 per 10 kg

Pasar raya B: RM23.99 per 10 kg

Katakan bilangan kampil beras 10 kg yang akan dibeli ialah 2.

Harga yang perlu dibayar

Pasar raya A: $2 \times \text{RM}25.95 = \text{RM}51.90$

Pasar raya B: $2 \times \text{RM}23.99 = \text{RM}47.98$

Jadi, dengan membeli beras di pasar raya B, seseorang itu dapat berjimat $\text{RM}51.90 - \text{RM}47.98 = \text{RM}3.92$

Katakan jarak di antara pasar raya A dengan pasar raya B ialah 6 km, kadar penggunaan petrol sebuah kereta adalah lebih kurang 17.6 km per liter, harga petrol semasa ialah RM2.08 per liter.

Petrol yang diperlukan bagi perjalanan 6 km = $\frac{6 \text{ km}}{17.6 \text{ km/liter}} = 0.341 \text{ liter}$

Kos petrol bagi perjalanan 12 km (dua hala) = $0.341 \text{ liter} \times \frac{\text{RM}2.08}{\text{liter}} \times 2 = \text{RM}1.42$

Jadi, wang yang dapat dijimatkan ialah $\text{RM}3.92 - \text{RM}1.42 = \text{RM}2.50$ apabila membeli 2 kampil beras 10 kg di pasar raya B.

Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Model matematik yang dapat dihasilkan adalah seperti berikut.

$$S = (P_1 - P_2) \times n$$

$$T = \frac{s}{m} \times H \times 2$$

Jika $S > T$, maka adalah lebih jimat untuk membeli beras di pasar raya B. Oleh itu, kita wajar memandu ke pasar raya B.

Jika $S \leq T$, maka kita tidak seharusnya memandu ke pasar raya B untuk membeli beras.

Contoh penggunaan model:

$$\begin{aligned} S &= (P_1 - P_2) \times n \\ &= (25.95 - 23.99) \times 2 \\ &= \text{RM}3.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{s}{m} \times H \times 2 \\ &= \frac{6}{17.6} \times 2.08 \times 2 \\ &= \text{RM}1.42 \end{aligned}$$

Semasa menentusahkan dan mentafsir penyelesaian, kita pertimbangkan:

- Adakah penyelesaian itu menangani masalah berkenaan?
- Adakah penyelesaian itu rasional apabila diterjemahkan kembali ke dunia sebenar?

Oleh sebab $S > T$, maka adalah lebih jimat untuk membeli beras di pasar raya B, maka kita wajar memandu ke pasar raya B. Oleh itu, model matematik tersebut dapat menangani masalah berkenaan.

Daripada model matematik yang dibina, penerokaan lanjutan boleh dibuat.

1. Jika semua pemboleh ubah dikekalkan, sejauh manakah jarak kedudukan pasar raya B adalah optimum?

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) \times n &> \frac{s}{m} \times H \times 2 \\ (25.95 - 23.99) \times 2 &> \frac{s}{17.6} \times 2.08 \times 2 \\ s &< 16.6 \text{ km} \end{aligned}$$

Hal ini bermakna jika jarak di antara dua pasar raya itu adalah kurang dari 16.6 km, maka adalah **wajar memandu ke pasar raya B** untuk membeli beras.

Buletin Ilmiah

Optimum bermaksud kedudukan yang terbaik atau paling menguntungkan.

2. Berapakah harga sekampit beras 10 kg yang maksimum di pasar raya B sehingga mempengaruhi seseorang memandu ke pasar raya B untuk membeli beras?

$$\begin{aligned} (P_1 - P_2) \times n &> \frac{s}{m} \times H \times 2 \\ (25.95 - P_2) \times 2 &> \frac{6}{17.6} \times 2.08 \times 2 \\ P_2 &< \text{RM}25.24 \end{aligned}$$

Hal ini bermakna selagi harga sekampit beras 10 kg di pasar raya B adalah kurang daripada RM25.24, perjalanan yang diambil adalah berbaloi.

Jadi, melalui model matematik di atas, kita bukan sahaja dapat menjawab sama ada tindakan yang diambil adalah terbaik untuk situasi yang diberi malah membolehkan kita menentukan faktor-faktor lain yang menyokong atau menyangkal keputusan untuk memandu pada jarak yang lebih jauh untuk membeli beras.

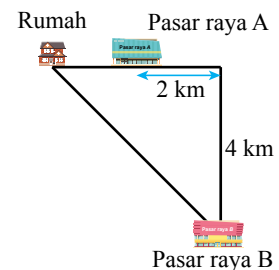
Kemudian, refleksi tentang model dan persoalan yang boleh ditimbulkan adalah seperti berikut.



Refleksi seperti ini membolehkan kita memikirkan keperluan memurnikan suatu model matematik.

Memurnikan model matematik

Andaian yang dibuat tentang lokasi rumah, pasar raya A dan pasar raya B yang berada pada suatu garis lurus perlu dikaji semula. Jika lokasi ketiga-tiga tempat ini tidak terletak di atas suatu garis lurus, bagaimana hal ini memberi impak kepada model kita? Jika andaian baharu dibuat, maka model perlu diubah untuk menggambarkan perubahan ini.



Melaporkan dapatan

Gunakan simbol dan rajah semasa melaporkan dapatan jika perlu. Simbol dan rajah yang digunakan akan menggambarkan keseluruhan proses pemodelan sehingga mencapai dapatan yang dikehendaki. Setiap model mempunyai kekuatan dan kelemahannya, yang penting model itu dapat mengenali kekuatan dan kelemahan itu dalam laporannya.

Misalnya,

- ❖ nilai bagi masa yang diperuntukkan oleh seseorang adalah sesuatu yang tidak dipertimbangkan dalam model ini. Adakah memandu tambahan 12 km untuk jumlah penjimatan sebanyak RM2.50 berbaloi bagi seseorang? Mengikut model ini, penjimatan 5 sen dianggap berbaloi.
- ❖ impak kepada alam sekitar tidak dipertimbangkan dalam model ini. Adakah dengan memandu tambahan jarak 12 km untuk penjimatan sebanyak RM2.50 itu mesra alam sekitar? Model ini tidak mempertimbangkan usaha ke arah kelestarian alam sekitar seperti usaha mengurangkan pengeluaran karbon dioksida.

Kita telah melihat cara proses pemodelan matematik dilakukan dengan menggunakan satu contoh di atas. Perlu ditegaskan bahawa kita tidak boleh menggunakan contoh ini sebagai satu templat penyelesaian kepada masalah yang lain. Dalam menyelesaikan masalah melalui pemodelan matematik, setiap individu atau kumpulan mempunyai idea, kemahiran dan persepsi yang berbeza. Soalan terbuka seperti ini berkemungkinan menjana model matematik yang berbeza sama sekali tetapi masih sah dengan menghasilkan jawapan yang berlainan.

Contoh 1

Jeremy menyimpan RM4 000 di Bank Bunga Raya dengan kadar faedah mudah 1.5% setahun. Jeremy ingin membeli seunit komputer berharga RM4 455 melalui hasil simpanannya. Berapa lamakah tempoh penyimpanan yang diperlukan oleh Jeremy?

- Kenal pasti dan definisikan masalah dalam persoalan di atas.
- Tentukan andaian yang perlu dibuat dan kenal pasti pemboleh ubah dalam menyelesaikan masalah di atas.

Penyelesaian:

- Dalam masalah ini, kita mengetahui prinsipal dan kadar faedah. Faedah ialah amaun yang Jeremy perlukan selain RM4 000 untuk membeli komputer. Kita perlu mencari tempoh simpanan Jeremy di bank.

(b) Andaian:

- Kita perlu mengandaikan kadar faedah tidak berubah sepanjang tempoh kita melakukan perhitungan faedah. Jika tidak, rumus $I = Prt$ menjadi tidak sah.
- Kita juga perlu mengandaikan harga komputer tidak berubah apabila Jeremy berjaya mengumpulkan amaun wang yang diperlukan.

Pemboleh ubah:

Pemboleh ubah yang terlibat ialah I untuk faedah, P untuk prinsipal, r untuk kadar faedah dan t untuk masa dalam tahun.

KOTAK MEMORI

Faedah mudah ialah ganjaran yang diberikan kepada penyimpan mengikut suatu kadar tertentu atas jumlah wang simpanannya untuk suatu tempoh masa yang tertentu. Faedah mudah boleh dihitung dengan menggunakan rumus $I = Prt$ dengan keadaan I ialah faedah, P ialah prinsipal, r ialah kadar faedah dan t ialah masa dalam tahun.

Latih Kendiri 8.1a

- Perjalanan sebuah bot ke arah hulu sungai yang meliputi dua tempat yang terletak di tebing sungai mengambil masa 6 jam. Perjalanan balik bot ke hilir sungai mengambil masa 5 jam. Jika kelajuan arus sungai ialah 2 km j^{-1} , berapakah kelajuan bot di atas air tenang?
 - Kenal pasti dan definisikan masalah dalam persoalan di atas.
 - Tentukan andaian yang perlu dibuat dan kenal pasti pemboleh ubah dalam menyelesaikan masalah di atas.
- Secara berkumpulan, baca soalan di bawah dan layari Internet untuk mendapatkan maklumat.

Anda baru sahaja menamatkan pengajian ijazah dalam bidang pemasaran dan ditawarkan kerja sebagai eksekutif pemasaran oleh dua buah syarikat berbeza. Syarikat A yang terletak di kampung halaman anda menawarkan gaji permulaan yang lebih rendah dan kenaikan gaji tahunan yang lebih rendah daripada syarikat B yang terletak di ibu kota. Pilihan yang manakah lebih berbaloi?

Terangkan cara anda menggunakan proses pemodelan matematik untuk menyelesaikan masalah di atas.

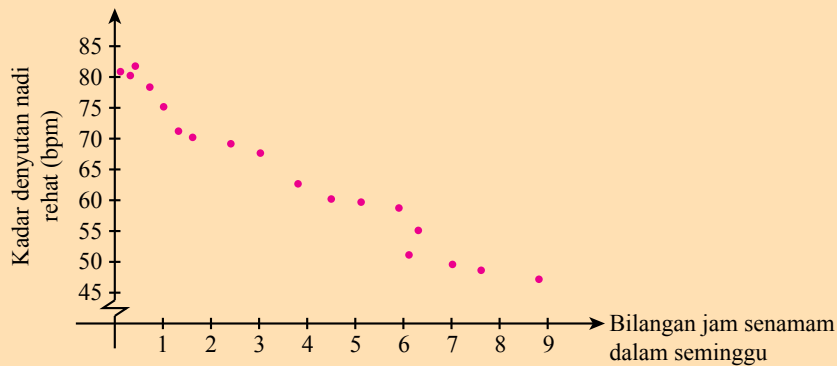
Bagaimanakah menyelesaikan masalah kehidupan sebenar melalui pemodelan matematik?

MOBILISASI MINDA 1 Berpasangan

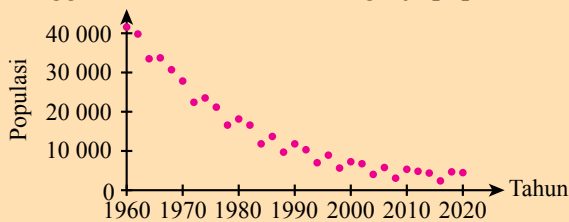
Tujuan: Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah.

Langkah:

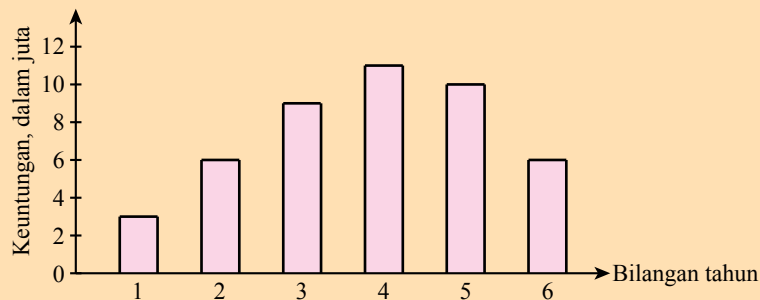
1. Berdasarkan maklumat dan rajah yang diberi, tentukan jenis fungsi (linear, kuadratik atau eksponen) yang mungkin boleh digunakan sebagai model bagi data.
2. Bincangkan pemilihan anda.
 - (a) Seorang doktor menggunakan data untuk mengkaji kadar denyutan nadi rehat orang dewasa yang normal mengikut bilangan jam senaman dalam seminggu.



- (b) Seorang saintis menggunakan data untuk mengkaji populasi harimau.



- (c) Seorang pengurus pemasaran mengkaji data yang menunjukkan hubungan antara keuntungan dengan bilangan tahun suatu produk berada di pasaran.



Hasil daripada Mobilisasi Minda 1, didapati bahawa kita dapat menentukan jenis fungsi yang mungkin boleh digunakan sebagai model bagi data dengan **mengkaji pola graf**.

Standard Pembelajaran

Menyelesaikan masalah kehidupan sebenar melalui pemodelan matematik yang melibatkan fungsi:

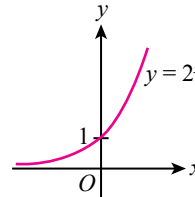
- (i) Linear
- (ii) Kuadratik
- (iii) Eksponen

dan mengkomunikasikan proses pemodelan matematik yang dilaksanakan.

Fungsi linear: Graf menyerupai satu garis lurus.

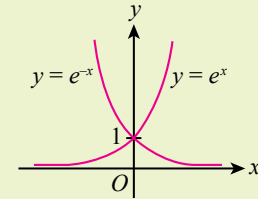
Fungsi kuadratik: Graf lengkung berbentuk parabola. Lengkung mungkin naik dan kemudian turun atau turun dan kemudian naik.

Fungsi eksponen: Graf lengkung yang mengilustrasikan kenaikan atau penurunan nilai data pada kadar yang mendadak. Fungsi eksponen ialah suatu fungsi yang dapat diuraikan oleh persamaan yang mempunyai bentuk $y = Ca^x$, dengan keadaan a ialah nombor nyata positif, $a \neq 1$ dan C ialah nilai awal. Misalnya, jika $C = 1$ dan $a = 2$, graf $y = 2^x$ adalah seperti rajah di sebelah.



Buletin Ilmiah

Rajah di bawah menunjukkan dua graf fungsi eksponen dengan asas e dengan keadaan $e = 2.7182818284$



Contoh 2

Kereta Amin menggunakan 45 liter petrol untuk bergerak sejauh 405 km. Jika Amin ingin memandu kereta yang sama untuk suatu perjalanan sejauh 198 km, berapakah jumlah petrol dalam liter yang diperlukan? Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik.

Penyelesaian:

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

- Tentukan isi padu petrol yang diperlukan untuk suatu perjalanan sejauh 198 km.
- Diketahui bahawa lebih jauh perjalanan, lebih banyak jumlah petrol diperlukan. Oleh itu, jumlah petrol berubah secara langsung dengan jarak perjalanan.

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

- Andaikan kelajuan memandu bagi kedua-dua perjalanan sejauh 405 km dan 198 km adalah sama
- Katakan x mewakili jarak perjalanan dan y mewakili jumlah petrol yang diperlukan
- y berubah secara langsung dengan x , maka $y = kx$ dengan keadaan k ialah pemalar

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

Gantikan $y = 45$ dan $x = 405$ ke dalam $y = kx$,

$$45 = k(405)$$

$$k = \frac{45}{405} = \frac{1}{9}$$

$$\text{Maka, } y = \frac{1}{9}x$$

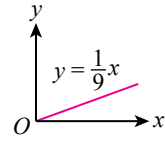
Persamaan ini menghuraikan hubungan antara jumlah petrol yang diperlukan dengan jarak perjalanan.

$$\begin{aligned} \text{Apabila } x = 198, y &= \frac{1}{9}(198) \\ &= 22 \text{ liter} \end{aligned}$$

Maka, 22 liter petrol diperlukan untuk suatu perjalanan sejauh 198 km.

Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Model fungsi linear $y = \frac{1}{9}x$ yang diperoleh mungkin tidak dapat digunakan untuk semua situasi perjalanan. Misalnya, jika perjalanan sejauh 405 km melalui jalan raya yang menghubungkan pekan dan bandar manakala perjalanan sejauh 198 km menerusi lebuh raya. Oleh itu, kadar penggunaan petrol adalah lebih cepat dalam perjalanan pertama berbanding dengan yang kedua. Apabila diterjemah kembali ke dunia sebenar, model fungsi linear yang diperoleh tidak sesuai digunakan untuk menangani masalah berkenaan.



Memurnikan model matematik

Dalam masalah ini, kita tidak dapat memurnikan model memandangkan maklumat yang diberi adalah terhad.

Melaporkan dapatan

Laporkan dapatan dalam bentuk penyelesaian masalah berdasarkan tafsiran penyelesaian yang telah dilaksanakan di atas.

Contoh 3

Rajah di bawah menunjukkan keratan rentas sebatang sungai. Seorang ahli hidrologi mengukur kedalaman sungai, y m, pada jarak yang berbeza, x m dari tebing sungai. Keputusannya yang diperoleh diberi dalam jadual berikut.



Jarak dari tebing sungai, x m	Kedalaman sungai, y m
0	0
4	1.5
8	2.3
12	2.9
18	2.9
25	1.7
30	0

Dengan menggunakan pemodelan matematik, tunjukkan cara ahli hidrologi itu menggunakan data di atas untuk menentukan kedalaman sungai itu.

Penyelesaian:

Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah

Bagaimana menentukan kedalaman sebatang sungai?

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

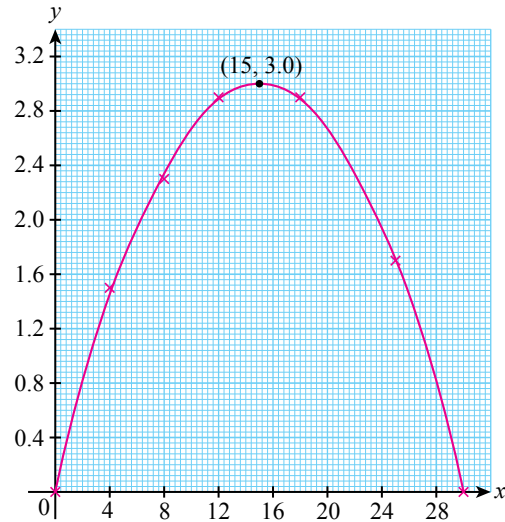
- Andaikan sungai adalah paling dalam di bahagian tengah dan kedalamannya berkurangan sehingga 0 di bahagian tepi sungai.
- Dua pemboleh ubah yang terlibat dalam kajian ini ialah kedalaman sungai, y m, dan jarak dari tebing sungai, x m.



Ahli hidrologi ialah ahli sains yang mengkaji tentang pergerakan, taburan dan kualiti air dalam alam semula jadi.

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

- Tulis jarak dari tebing sungai dan kedalaman sungai sebagai set pasangan tertib (x, y) dan lukis satu graf bagi data tersebut.
- Data kelihatan menaik dan kemudian menurun dan ini menyerupai suatu fungsi kuadratik.
- Graf yang dilukis menunjukkan lengkung penyuaian terbaik dan **menyerupai graf fungsi kuadratik**.
- Dalam pemodelan matematik untuk mewakili situasi sebenar, nilai anggaran digunakan.
- Berdasarkan graf, didapati kedalaman sungai ialah 3 m. Hal ini berlaku ketika jarak dari tebing sungai ialah 15 m (anggaran).



Menentukan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Tentukan fungsi kuadratik berkenaan yang mempunyai bentuk $y = ax^2 + bx + c$. Tentukan pemalar a , b dan c dengan menggantikan sebarang tiga data, misalnya $(0, 0)$, $(25, 1.7)$ dan $(30, 0)$ ke dalam persamaan.

$$\begin{aligned} 0 &= a(0)^2 + b(0) + c \\ 1.7 &= a(25)^2 + b(25) + c \\ 0 &= a(30)^2 + b(30) + c \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 0 &= c \\ 1.7 &= 625a + 25b + c \\ 0 &= 900a + 30b + c \end{aligned}$$

Oleh sebab $c = 0$, sistem bagi dua persamaan linear dalam dua pemboleh ubah ialah:

$$\begin{aligned} 1.7 &= 625a + 25b \quad \text{..... ①} \\ 0 &= 900a + 30b \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

Daripada ②, $b = -30a$ ③

$$\begin{aligned} \text{Gantikan ③ ke dalam ①, } 1.7 &= 625a + 25(-30a) \\ 1.7 &= -125a \\ a &= -0.0136 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Gantikan } a = -0.0136 \text{ ke dalam ③, } b &= -30(-0.0136) \\ &= 0.408 \end{aligned}$$

Maka fungsi kuadratik yang mungkin ialah $y = -0.0136x^2 + 0.408x$

$$\begin{aligned} \text{Gantikan } x = 15, y &= -0.0136(15)^2 + 0.408(15) \\ &= 3.06 \text{ (hampir dengan jawapan yang diperoleh daripada graf)} \end{aligned}$$

Buletin Ilmiah

Sistem persamaan linear bermaksud, terdapat dua atau lebih persamaan linear yang melibatkan set pemboleh ubah yang sama.

Memurnikan model matematik

- Model ini, kita andaikan kedalaman sungai adalah paling dalam di bahagian tengah. Hal ini mungkin tidak benar bagi sesetengah sungai lain. Model baharu diperlukan untuk andaian baharu.
- Kejituan jawapan akan bertambah jika lebih banyak data diambil.

Melaporkan dapatan

Laporan penuh dibuat berdasarkan struktur rangka kerja pemodelan di atas.

Contoh 4

Faedah kompaun ialah faedah yang dihitung berdasarkan prinsipal asal dan juga faedah yang terkumpul daripada tempoh penyimpanan sebelumnya. Pada awal suatu tahun, Encik Gomez menyimpan RM20 000 dalam akaun simpanan yang memberikan faedah 4% setahun dan dikompaun setiap setahun. Terbitkan satu model matematik bagi jumlah simpanan Encik Gomez selepas t tahun penyimpanan. Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik.

Penyelesaian:**Mengenal pasti dan mendefinisikan masalah**

- Encik Gomez diberikan faedah kompaun dengan pengkompaunan sekali setahun.
- Prinsipal Encik Gomez ialah RM20 000.
- Kadar faedah tahunan ialah 4%.
- Terbitkan satu model matematik bagi jumlah simpanan Encik Gomez pada akhir tahun ke- t .

Membuat andaian dan mengenal pasti pemboleh ubah

- Andaikan Encik Gomez tidak mengeluarkan atau menambah wang simpanannya sepanjang tempoh penyimpanannya.
- Pemboleh ubah yang terlibat ialah prinsipal, RMP, kadar faedah tahunan, r , bilangan kali faedah dikompaun, n , dan masa, t tahun.

Mengaplikasi matematik untuk menyelesaikan masalah

Harus diingat dalam pengiraan faedah kompaun, setiap tahun kita akan mempunyai 100% prinsipal, ditambah dengan 4% baki sebelumnya. Kita membina jadual seperti berikut.

Tahun	Prinsipal (RM)	Faedah yang diterima (RM)	Prinsipal + Faedah (RM)	Hasil simpanan (RM)
1	20 000	$20\,000 \times 0.04$	$20\,000 + 20\,000 \times 0.04$ $= 20\,000(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)$
2	$20\,000(1.04)$	$20\,000(1.04) \times 0.04$	$20\,000(1.04) + 20\,000(1.04) \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^2$
3	$20\,000(1.04)^2$	$20\,000(1.04)^2 \times 0.04$	$20\,000(1.04)^2 + 20\,000(1.04)^2 \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)^2(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^3$
4	$20\,000(1.04)^3$	$20\,000(1.04)^3 \times 0.04$	$20\,000(1.04)^3 + 20\,000(1.04)^3 \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)^3(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^4$
5	$20\,000(1.04)^4$	$20\,000(1.04)^4 \times 0.04$	$20\,000(1.04)^4 + 20\,000(1.04)^4 \times 0.04$ $= 20\,000(1.04)^4(1 + 0.04)$	$20\,000(1.04)^5$

Menentusahkan dan mentafsir penyelesaian dalam konteks masalah berkenaan

Berdasarkan jadual di atas, didapati bahawa pada penghujung setiap tahun, hasil simpanan ialah suatu kuasa 1.04 didarab dengan prinsipal simpanan sebanyak RM20 000, dan kuasa itu sepadan dengan bilangan tahun simpanan.

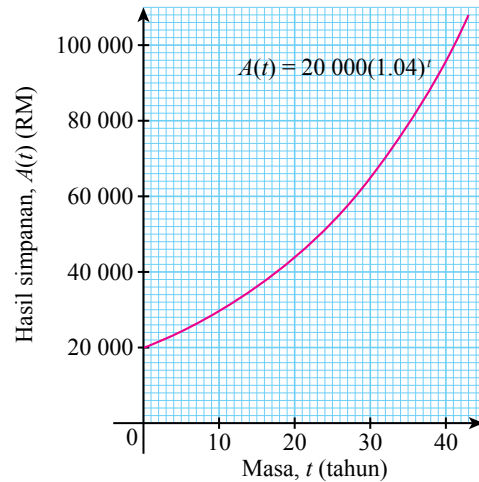
Pola tersebut dapat digeneralisasikan kepada satu model matematik dengan menggunakan P untuk mewakili prinsipal, t untuk mewakili bilangan tahun dan r untuk mewakili kadar faedah tahunan. Maka, model matematik ialah

$$A(t) = P(1 + r)^t, \quad \leftarrow \text{Perhatikan bahawa } 1.04 = 1 + 0.04 = 1 + r$$

dengan keadaan $A(t)$ ialah jumlah simpanan pada tahun ke- t .

Model matematik ini merupakan suatu fungsi eksponen yang membolehkan kita menghitung hasil simpanan jika faedah dikompaunkan setahun sekali untuk t tahun.

Graf di sebelah menunjukkan graf fungsi eksponen $A(t) = 20\,000(1.04)^t$. Graf hasil simpanan selepas t tahun, $A(t)$, menunjukkan suatu pertumbuhan eksponen apabila masa, t , bertambah.



Memurnikan model matematik

Model matematik $A(t) = P(1 + r)^t$ merupakan pengiraan untuk faedah kompaun dengan kekerapan pengkompaunan sekali setahun. Dalam situasi sebenar, faedah kompaun boleh dikompaunkan dengan lebih kerap, misalnya setengah tahun sekali atau 3 bulan sekali dan sebagainya.

Jika faedah dikompaunkan sebulan sekali, kadar faedah r dibahagikan antara 12 bulan kerana $\frac{1}{12}$ daripada kadar digunakan setiap bulan. Pemboleh ubah t didarab dengan 12 kerana faedah dihitung 12 kali dalam setahun. Maka, model matematik akan berubah menjadi $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}$. Secara umumnya, jika faedah dikompaunkan n kali setahun, model matematik ialah $A(t) = P\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}$.

Melaporkan dapatan

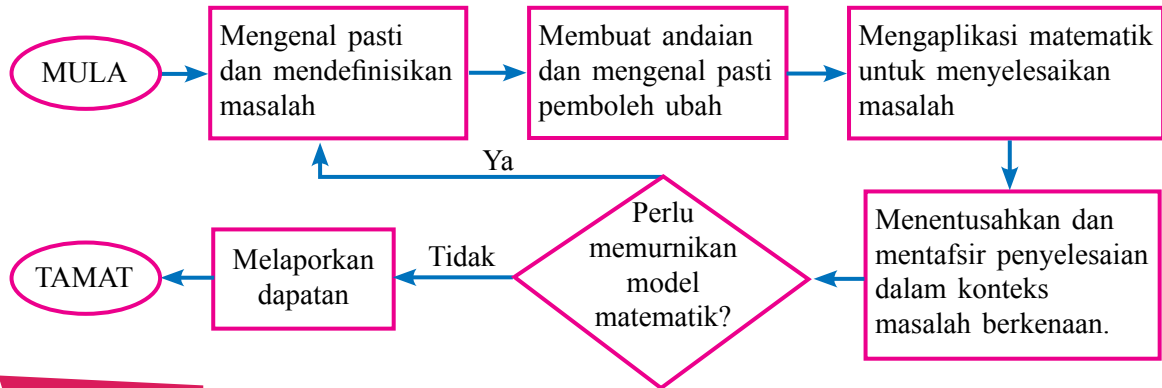
Laporan penuh dibuat berdasarkan struktur rangka kerja pemodelan di atas.

Latih Kendiri 8.1b

1. Seorang pelari berlatih untuk menyertai perlumbaan maraton. Dia berlatih mengikut rutin untuk berlari 32 km seminggu. Pelari itu bercadang menambahkan jarak larian $D(x)$, dalam km, sebanyak 10% daripada jarak larian pada minggu sebelumnya, dengan keadaan x mewakili bilangan minggu latihan. Terbitkan satu model matematik bagi jarak lariannya, $D(x)$. Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik.
2. Keadaan suhu badan yang jauh lebih tinggi daripada paras normal dikenali sebagai hipertermia. Satu daripada punca hipertermia termasuk pendehidratan, iaitu kehilangan cecair melebihi jumlah yang diambil. Mengapa anak kecil mempunyai risiko yang lebih tinggi mengalami hipertermia berbanding dengan orang dewasa apabila berada di bawah cuaca panas? Selidik masalah ini melalui pemodelan matematik.

Arena Rumusan

PROSES PEMODELAN MATEMATIK



Refleksi

Pada akhir bab ini, saya dapat

menerangkan pemodelan matematik.

menyelesaikan masalah kehidupan sebenar melalui pemodelan matematik yang melibatkan fungsi:

- (i) Linear
- (ii) Kuadratik
- (iii) Eksponen

dan mengkomunikasikan proses pemodelan matematik yang dilaksanakan.



PROJEK MINI

Buka lembaran kerja untuk projek ini.

1. Anggarkan panjang pinggir pantai Malaysia dengan menggunakan unit 200 km dan unit 100 km.
2. Ramalkan keputusan anda jika panjang pinggir pantai diukur dengan menggunakan unit 50 km. Terangkan.
3. Jika anda terus mengurangkan saiz unit ukuran, apakah jangkaan anda terhadap nilai panjang pinggir pantai?
4. Adakah anda akan sampai ke suatu tahap yang mana anda akan dapat menentukan panjang pinggir pantai dengan tepat?

Setelah anda menentukan panjang pinggir pantai Malaysia dengan kaedah di atas, dapatkan panjang sebenar pinggir pantai Malaysia daripada sumber yang sahih. Carikan juga maklumat cara ahli geografi menentukan panjang pinggir pantai sesebuah negara. Sediakan laporan bertulis untuk proses pemodelan matematik yang dilaksanakan sepanjang projek ini.



Imbas kod QR atau layari bit.do/LKBab8 untuk mendapatkan lembaran kerja.

Latih Ekstensif

Imbas kod QR atau layari
bit.do/Kuiz08 untuk kuiz interaktif



FAHAM

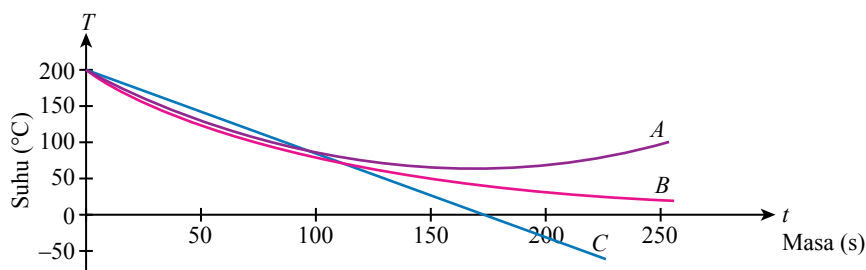
1. Nyatakan semua komponen dalam pemodelan matematik.

MASTERI

2. Seorang ahli sains sedang mengkaji pola penyejukan bagi sejenis bahan tertentu dalam suatu tempoh masa tertentu. Dalam kajiannya, ahli sains perlu memanaskan sampel bahan itu sehingga 200°C . Beliau kemudian mencatatkan suhu penyejukan sampel bahan itu sehingga suhu bilik. Jadual berikut menunjukkan data yang dikumpulkan bagi 2 minit pertama proses penyejukan.

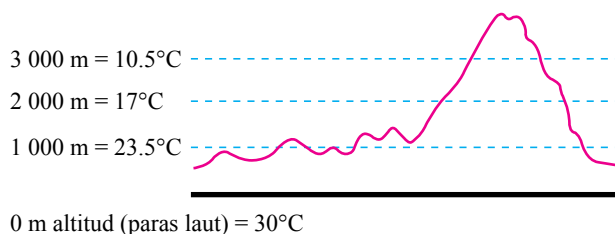
Masa (s)	0	40	80	120
Suhu ($^{\circ}\text{C}$)	200	140	100	75

Rajah di bawah menunjukkan tiga model yang mungkin bagi data tersebut, iaitu model linear, model kuadratik dan model eksponen.



- (a) Antara A , B dan C , yang manakah model linear, model kuadratik dan model eksponen?
- (b) Antara A , B dan C , model yang manakah paling baik menghuraikan suhu sampel bahan itu dalam julat masa $0 \leq t \leq 250$? Terangkan sebab model lain tidak dapat menghuraikan suhu dalam julat masa berkenaan dengan baik.

3. Apabila altitud bertambah, suhu biasanya menurun. Secara purata, kadar penurunan suhu bagi troposfera (lapisan pertama atmosfera bumi) ialah 6.5°C per 1 000 m. Rajah di bawah menunjukkan keratan rentas Gunung Kinabalu (4 095 m) di Sabah dengan suhu yang berbeza pada altitud berlainan. Suhu pada altitud 0 m (paras laut) ialah 30°C .

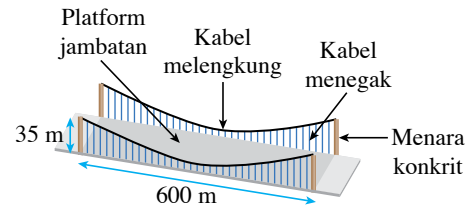


- (a) Tulis satu persamaan yang mengungkapkan suhu, $T^{\circ}\text{C}$ sebagai satu fungsi dalam altitud, x m, bagi situasi yang ditunjukkan dalam rajah di atas.

- (b) Sahkan persamaan anda di (a) adalah munasabah dengan menggunakan data yang diberi dalam rajah.
- (c) Lukis satu graf yang menunjukkan hubungan antara x dengan T . Tunjukkan dengan jelas skala pada setiap paksi dan labelkan paksi anda.
- (d) Apakah julat yang munasabah bagi fungsi $T(x)$? Justifikasikan jawapan anda.
- (e) Apakah kecerunan bagi graf yang dilukis? Apakah pengertian kecerunan graf tersebut dalam konteks suhu dan altitud?
- (f) Apakah pintasan- y bagi graf yang dilukis? Apakah pengertian pintasan- y bagi graf tersebut dalam konteks suhu dan altitud?
- (g) Adakah munasabah untuk membuat andaian bahawa suhu selalu berkurangan pada kadar linear apabila altitud bertambah? Terangkan jawapan anda.

CABAR

4. Rajah di sebelah menunjukkan sebuah jambatan gantung. Jarak terdekat dari kabel melengkung ke platform jambatan ialah 5 m. Dengan menggunakan pemodelan matematik, tunjukkan cara seorang jurutera boleh menggunakan maklumat yang diberi untuk menyelesaikan masalah berikut.



- (a) Tentukan fungsi yang mewakili kabel melengkung itu.
- (b) Tentukan bilangan kabel menegak yang diperlukan di kedua-dua belah jambatan jika jarak di antara dua kabel menegak yang berturutan ialah 20 m.
- (c) Tentukan jenis bahan kabel yang harus digunakan supaya jumlah kos kabel menegak adalah minimum.

Jarak di antara kabel menegak (m)	Jenis bahan kabel	Kos per m (RM)	Jumlah kos kabel menegak (RM)
15	<i>A</i>	750	
20	<i>B</i>	1 000	
25	<i>C</i>	1 200	


TEROKAI MATEMATIK

Kelas anda ingin mengadakan jamuan akhir tahun. Anda ditugaskan untuk menentukan jenis piza yang perlu ditempah supaya memenuhi cita rasa kebanyakan rakan kelas anda. Pertimbangan anda meliputi syarikat piza, jarak penghantaran, kos piza, saiz piza, cara penghantaran (mengambil sendiri, melalui aplikasi telefon dan lain-lain), jenis piza (vegetarian, bebas gluten dan lain-lain), jenis hias atas (tomato, keju, bawang putih dan lain-lain) dan sebagainya.

Selesaikan masalah ini melalui pemodelan matematik. Anda boleh menggunakan pemboleh ubah untuk mewakili kuantiti yang boleh berubah dan menggunakan persamaan untuk mewakili hubungan antara kuantiti ini. Bagi soalan berbentuk kualitatif misalnya jenis hias atas, anda boleh mencipta satu sistem pengskoran yang mengambil kira nilai kalori, nutrien dan sebagainya. Dalam proses pemodelan, anda juga mungkin boleh membuat andaian dengan mengehadkan jenis pilihan supaya skop pemodelan menjadi lebih kecil.